Exercice n° 15

● • a) h est définie si et seulement si

$|x| - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ *ou* $x \neq -1$

Donc : $Dh = IR \setminus \{-1,1\}$

• pour tt $x \in Dh$, *on a* $-x \in Dh$ et :

$$h(-x) = \frac{-x}{|-x|-1} = -\frac{x}{|x|-1} = -h(x)$$

D'où h est une fonction impaire ce qui prouve que l'origine du repère est un centre de symétrie pour la courbe de la fonction h.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ (Pour $x > 0$ on a $|x| = x$)

Donc la droite d'équation y = 1 est une asymptote horizontale pour la courbe de h au voisinage de $+\infty$

• $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x}{\underbrace{|x|}_{=x>0} - 1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Donc la droite d'équation x = 1 est une asymptote verticale pour la courbe de h

**Par raison de symétrie les droites d'équations x = –1 y = – 1 sont deux asymptotes à C_h

● Etudions h sur $D_E = D_h \cap [0, +\infty[$

$D_E = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

On a pour tout $x \in D_E$: $h(x) = \frac{x}{x-1}$ car $|x| = x$

h est dérivable sur D_E et $h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		–	‖	–	
$h(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

● $g(x) = h(x)$ pour $x \in]0, 1[$

a) g étant continue et strictement décroissante sur]0, 1[

donc g réalise une bijection de]0, 1[sur J = $]-\infty, 0[$

b) $y \in]0, 1[$, $x \in]-\infty, 0[$

$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$, cherchons donc y

$$g(y) = \frac{y}{y-1} = x \Leftrightarrow y = xy - x$$

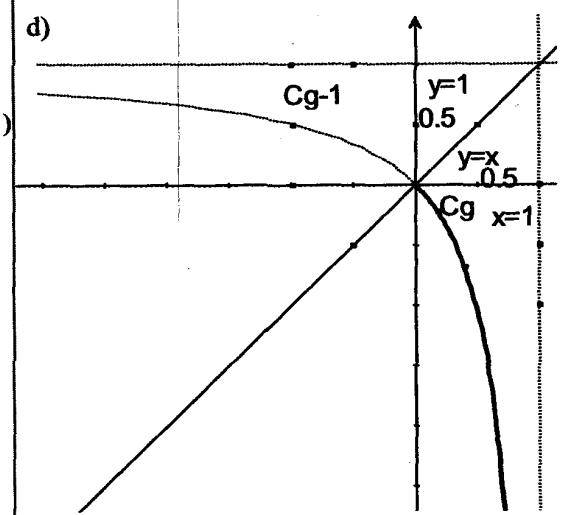
$$\Leftrightarrow y(x-1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}.$$

D'où $\boxed{g^{-1}(x) = g(x) = \frac{x}{x-1} ; x \in]-\infty; 0[.}$

c) g est dérivable et $g'(x) \neq 0$ sur]0, 1[donc g^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et on a

$$(g^{-1})'(x) = g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

d)



Exercice n° 16

● a) g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR et $g'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

$g'(x) = 0$ signifie $x = 0$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	–	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

b) • g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $g([0, +\infty[) = [1, +\infty[$

Comme $0 \notin [1, +\infty[$ alors l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas des solutions dans $[0, +\infty[$

De même l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas des solutions Dans l'intervalle $[-1, 0]$

Qarray.tn-Adra Blech-Qarray.tn